**1. Sea el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}.**

**(a) Representa mediante una cadena de bits los subconjuntos ∅, {2, 3, 5}, {1, 5} y A.**

0 → 00000

{2,3,5} → 01101

{1,5} → 10001

A → 11111

**(b) Determina el número de subconjuntos no vacíos de A.**

2^5 - 1 = 31

**(c) Calcula cuántos subconjuntos de A contienen a los elementos 1 y 2.**

2^3-1 = 7

**2. Determina cuántos números capicúas hay con siete cifras.**

Capicúa con 7 cifras: (a,b,c,d,c,b,a)

Entonces, hay tantos como combinaciones de 4 cifras: 9\*10\*10\*10 = 9000.

**3. En un colegio se utilizan códigos formados por tres letras mayúsculas (de las 27 del alfabeto) seguidas de 4 cifras (del 0 al 9) para clasificar los historiales de los alumnos.**

**(a) ¿Cuántos expedientes se pueden codificar?**

27 ^ 3 \* 10^4 =78030000

**(b) ¿Y si en cada código no se repiten las cifras ni las letras?**

27\*26\*25\*10\*9\*8\*7= 88.452.000

**(c) ¿Cuántos códigos que cumplen la condición del apartado anterior no son de la forma A − − 1 − − 3?**

Son de la forma A- - 1 - - 3: 26\*25\*10\*9 = 58500

Luego no son de esta forma: 88.452.000-58500 = 87.867.000

**4. Demuestra que, dado cualquier conjunto de seis enteros positivos distintos, hay al menos dos cuya diferencia es un múltiplo de 5.**

Consideramos sólo la última cifra de cualquier número. Entonces, cualquier entero se puede incluír en una de las cajas:

{0,5}, {1,6}, {2,7}, {3,8}, {4,9}.

Al repartir 6 enteros en estas cajas, sabemos que al menos 2 compartirán caja.

Si dos números comparten caja, puede ocurrir que acaben en la misma cifra (en ese caso, su diferencia acaba en 0 y es múltiplo de 5) o queuno acabe en la cifra n y otro en n+5 (en ese caso, su diferencia acaba en 5 y es también múltiplo de 5).

**5. Un estudiante de derecho estudió un total de 110 páginas para un examen durante 10 días consecutivos (cada día un número entero de páginas). Si sabemos que el último día estudió tantas páginas como el primero y menos de 10 páginas, demuestra que hubo un par de días consecutivos en los que estudió un total de, al menos, 23 páginas.**

92

8días - 4 pares de días

[92/4] = 23

**6. Consideremos un conjunto de 5 números naturales diferentes {n1, n2, n3, n4, n5} cuya suma es 39. Demuestra que existen en este conjunto tres números cuya suma es al menos 24.**

El número de conjuntos de 3 números distintos que podemos formar con 5 números es 5\*4\*3 / 6 = 10

Sean S1…S10 estos conjuntos. Cada uno de los números n1…n5 aparece en exactamente 6 de estos conjuntos. Entonces:

S1 + … + S10 = 6\*n1 + … + 6\*n5 = 6 \* 39 = 234

Entonces, la suma de los 10 conjuntos es mínimo 234. Luego, no se puede dar que todos los conjuntos de suma sean menores o iguales que 23, pues en ese caso la suma sería menor o igual que 230. Al menos 4 conjuntos deben sumar 24.

**7. Si se eligen 10 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, demuestra que hay puntos cuya distancia de separación es inferior a 1/3.**

Dividimos el triángulo en 9 triángulos de lado 1/3. Por el principio del palomar, al menos 2 puntos deben compartir triángulo, y su distancia será menos de ⅓.

**8. El 18 de septiembre de 2000 entró en vigor un nuevo sistema de matriculación de vehículos en España. Es el llamado modelo “europeo”, sin distintivos provinciales, con la “E” de España sobre la bandera de la Unión Europea y una combinación de cuatro cifras (de 0000 a 9999) seguidas de tres letras (de BBB a ZZZ) de las que se excluyen las vocales (para evitar combinaciones malsonantes y acrónimos significativos), la Ñ (por confundirse con la N) y la Q (por confundirse con el 0).**

**(a) ¿Cuántas matrículas diferentes son posibles con este sistema?**

27 - 5 - 2 = 20.

20^3 \* 10^4 = 80000000

**(b) ¿En cuánto podría incrementarse la cantidad si se permitiesen las vocales?**

20+5 = 25

25 ^ 3 \* 10^4 = 156.250.000. Aumento de 76.250.000

**(c) En ese caso, ¿cuántos vehículos habría entre 1990 USC y 2015 UDC?**

A matrícula 1990 USC é a matricula numero

(19\*25\*25 + 17\*25 + 2)\*10000 + 1990 + 1=123.021.991

A matrícula 2015 UDC é a matricula numero

(19\*25\*25 + 3\*25 + 2)\*10000 + 2015 + 1= 119.522.016

Logo, entre elas hai o seguinte número de matrículas: 3.499.975

**9. Un profesor cuenta con 7 chicos y 10 chicas en un grupo de tutorías y decide seleccionar un equipo de trabajo formado por dos o tres alumnos. Calcula el número de posibilidades que tiene para hacer el equipo si quiere que en él haya, exactamente, un chico y no quiere que Xan trabaje con Usúe ni con Henar.**

En los grupos en los que está Xan sólo hay 8 chicas disponibles.

Entonces, grupos de 1 chico y 1 chica:

Con Xan: 8

Sin Xan: 6 \* 10 = 60

Grupos de 1 chico y 2 chicas:

Con Xan: (8 \* 7)/2 = 28

Sin Xan: (6 \* 10 \* 9)/2 = 270

El total de grupos es 366.

**10. El 30% del alumnado que se matricula por primera vez en el Grado en Ingeniería Informática aprueba todo en la primera oportunidad. Si en ninguna de las 10 asignaturas el porcentaje de suspensos entre los matriculados por primera vez supera el 15%, demuestra que hay al menos tres de esas asignaturas en las que este porcentaje no baja del 5%.**

El 30% aprueba todo → El 70% suspende alguna.

En ninguna asignatura suspende más del 15%

Por el principio del palomar, si el 70% suspende alguna asignatura y hay 10 asignaturas, al menos una de ellas tiene un porcentaje de suspensos de 7%.

También sabemos que en cada asignatura el % de aprobados es como máximo 15%. Entonces, podemos descartar una asignatura y decir que el porcentaje de aprobados global sigue siendo, al menos, 55%.

Por el principio del palomar, esto significa que hay al menos una asignatura con mínimo 55/9 = 6.111 = 7% de aprobados.

Repetimos este proceso, quedando con 40% de aprobados en 8 asignaturas. Luego, existe a menos una con un % de aprobados del 40/8 = 5%.

2 asignaturas tienen mínimo 7% de aprobados, y otra tiene mínimo 5%.

**Combinaciones y variaciones**

1. **Con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar sin repetir las cifras? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 2?**

6! / (6-3)! = 120 / 6 = 120 Múltiplos de 2: la mitad, 60.

1. **¿Cuántos números de 4 cifras existen tal que el producto de sus cifras centrales es par y el producto de las cifras externas es impar?**

Números de 4 cifras: 10^4 = 10000 - 1000 = 9000  
Cifras centrales es par: ¾

Cifras externas es impar: ¼

Total: ⅜ de los números, 3.375

1. **Calcula de cuántas maneras se puede elegir un cuadrado blanco y otro negro en un tablero de ajedrez de modo que los dos cuadrados no estén en la misma fila ni en la misma columna.**

Elección inicial: 32 cuadrados

Que no estén en la misma fila: 32-4 = 28

Que no estén en la misma columna: 28-4 = 24

Al no importar el orden se divide entre 2.

32 \* 24 / 2 = 384

1. **¿Cuántos códigos de longitud 7 se pueden escribir con los elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 si el producto de las cifras ha de ser exactamente 30?**

30 = 2\*3\*5, o 6\*5

El número de cadenas que se puede n hacer se encuentra a partir de las posiciones posibles de los 1s. Para las combinaciones 5,6 serán el número de cadenas de bits de 5 1s y 2 0s. Luego multiplicamos por 2 por el número de posiciones que pueden tomar el 5 y el 6.

C(7,5) \* 2

Para las cadenas de 2,3,5, se hace lo mismo con las cadenas de 3 1s. Luego, multiplicamos por 3! por ser las posibilidades de colocar 3 +números.

Resultado final: C(7,4)\*3 + C(7,5)

**5.Un grupo de peregrinos está formado por 10 italianos y 8 argentinos. Cuando llegan al albergue tienen que formar una fila para coger habitación. ¿De cuántas formas se pueden colocar en la fila de modo que no se separen los peregrinos de la misma nacionalidad?**

Pueden estar todos los italianos en frente o todos los argentinos.

Existen 2 \* 10! \* 8! = 292.626.432.000

**6. Halla el número de divisores positivos de n = 245 3112 . De estos, ¿cuántos terminan en 0?**

2^x \* 5^y \* 11^z

x{0,4} y {0,3} z {0,2}

5 \* 4 \* 3 = 60 divisores

terminan en 0: x,y >=1. Entonces, se eliminan posibilidades:

4\*3\*3 = 36 divisores

**7. ¿Cuántos pares ordenados de números enteros positivos (a, b) hay de forma que mcm(a, b) = 23 56 1112, donde mcm(a, b) denota el mínimo común múltiplo de a y b?**

Los números son de la forma 3^a \* 5^b \* 11^c y 3^a’ \* 5^b’ \* 11^c’’, tales que máx(a,a’)=3, max(b,b’)=6 y max(c,c’)=12.

Para cada conjunto, siendo n el resultado, existen 2\*n+1 combinaciones posibles: 2n para cada caso donde es relevante el orden y +1 por el caso (n,n).

Entonces, hay (2\*3+1) \* ) (2\*6+1) (2\*12 + 1) = 7\*13\*25 pares de números.

**8.En un club de magia formado por 27 aprendices y 10 magos se quiere elegir una comisión formada por 4 personas (presidente, secretario, tesorero y vocal) con el fin de elaborar la previsión de gastos del club para el año próximo.**

**(a) ¿De cuántas formas se puede elegir la comisión?**

V(37,4) = 37! / 33!

**(b) ¿De cuántas formas se puede elegir la comisión si se quiere que esté presidida por un mago?**

Elección presidente: 10 posibilidades

Resto de la mesa: V(36,3) = 36! / 33!

En total, (36! / 33!) \* 10

**(c) ¿Y si se quiere que haya al menos un mago, aunque no sea el presidente?**

V(37,4) - V(27,4)

**(d) ¿Cuántas comisiones puede haber si el mago Ojeda y su hijo, el aprendiz Manuel, no pueden estar en la misma comisión?**

V(37,4) - V(4,2)

**9.Sean n, m ∈ N. Determina el número de caminos distintos que hay para trasladarnos del punto P(0, 0) al punto Q(n, m), situados sobre una cuadrícula, considerando que únicamente podemos realizar dos tipos de movimientos: movimientos de izquierda a derecha y de abajo a arriba.**

Hay que desplazarse n veces a la derecha y m abajo, teniendo en cuenta el orden.

C(m+n, n) = m+n sobre n. Da lo mismo que m+n sobre m.

**10. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, calcula el número de caminos distintos que podemos seguir para ir desde el punto (0, 0) al punto (5, 5) con la restricción añadida de que, si bien podemos tocar la diagonal en algún punto (k, k), además de (0, 0) y (5, 5), en ningún momento podremos cruzarla.**

Se calculan primero los caminos no permitidos (los que pasan por la diágonal).

Ejemplo camino prohibido: DADAADDDAA.

Ejemplo camino permitido: DADDAADDAA.

En un camino permitido, siempre hay en cada punto del circuito más Ds totales que As. Si en un punto determinado un camino tiene más As, estará cruzando la diagonal.

Tomamos el camino prohibido DADAADDDAA. A partir del punto donde cruza la diagonal, permutamos las A por las D: DADAAAAADD.

Tomamos un camino prohibido: ADDDDDAAAA. Hacemos lo mismo: AAAAAAADDDD.

Estos códigos tienen 6 As y 4 Ds. Existen 10 | 6 códigos de 6 As y 4 Ds. Entonces, existen 10 | 6 códigos prohibidos.

En total, entonces, hay 10 | 5 - 10|6 códigos permitidos.

**11. Resuelve las cuestiones siguientes:**

**(a) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco libros diferentes entre diez niños si ninguno de ellos puede recibir más de uno?**

V(10,5) = 10\*9\*8\*7\*6

**(b) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco libros diferentes entre diez niños si cualquiera de ellos puede recibir cualquier número de libros?**

VR(10, 5) = 10^5

**(c) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco ejemplares de un mismo libro entre diez niños si ninguno de ellos puede recibir más de uno?**

C(10,5) = 10 | 5

**(d) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco ejemplares de un mismo libro entre diez niños si cualquiera de ellos puede recibir cualquier número de ejemplares?**

CR(n,r) = CR(10,5) = C(14,5)

**(e) ¿De cuántas formas se pueden repartir once ejemplares de un mismo libro entre seis niños si cada uno de ellos debe recibir, al menos, un ejemplar?**

CR(r,r-n) = (r-1 | r-n) = (10 | 5)

**12. Para repartir entre 7 niños disponemos de 7 libros, 4 de ellos son iguales y los otros 3 son distintos de estos y distintos entre sí.**

**(a) ¿De cuántas formas se pueden repartir si cada niño lleva un libro?**

PR(7,4,1,1,1) = 7! / 4! = 7\*6\*5

**(b) ¿De cuántas formas se pueden repartir si algún niño puede quedarse sin libro?**

7^3 \* C(7+4-1 , 4)

**(c) ¿De cuántas formas se pueden repartir si algunos niños pueden llevar 2 o más libros diferentes?**

De la misma forma, los libros diferentes se reparten como 7^3.

Luego repartimos los diferentes, sin que ningún niño tome 2 de estos libros iguales.

**13. ¿Cuántas secuencias con m ceros y n unos hay de modo que dos unos consecutivos estén separados por al menos dos ceros (se supone que m ≥ 2(n − 1))?**

Debe haber al menos 2 en cada posición x1, xn-1. Entonces, podemos simplificar el problema restando (n-2)/2.

**14. Utilizando un alfabeto de 26 letras, queremos transmitir mensajes formados por 10 letras separadas, cada dos consecutivas, por un número entero mayor que 3. ¿Cuántos mensajes son posibles si la suma de los números tiene que ser 43, las letras deben ser distintas y tanto su ordenación como la de los números son significativas?**

**15. Tenemos una red formada por 25 ordenadores conectados en serie y numerados del 1 al 25. Por razones de eficiencia queremos dividirla. (a) ¿De cuántas formas podemos dividirla en 5 subredes de ordenadores consecutivos, cada una de ellas con, al menos, 3 ordenadores? (b) Si sólo necesitamos 20 ordenadores, ¿de cuántas maneras podemos prescindir de 5 ordenadores y formar 5 subredes de ordenadores consecutivos con, al menos, 3 ordenadores en cada una**